Формализация сегмента Части I *Этики* Спинозы

Алекс Блюм и Стенли Малинович

Перевод Т.А. Шияна[1]

Введение

В этой статье мы формализуем сегмент Части I *Этики* Спинозы в канонической нотации первопорядковой кванторной теории[2].

Формализованный сегмент состоит из определений, аксиом, первых восьми утверждений (теорем) и Утверждения XI – спинозовской версии онтологического аргумента существования Бога.

Мы выводим формулируемые утверждения посредством натурального вывода[3] из аксиом и определений. Спиноза не приводит списка правил вывода, а аксиомы и определения играют одинаковую роль в его выводах (*derivations*).

Мы столкнулись с двумя видами трудностей. Первый вид составляют трудности, относимые нами на счет Спинозы, второй вид – трудности, относимые нами к ограниченности, присущей первопорядковому экстенсиональному языку.

Две трудности первого вида, которые мы встретили и попытались преодолеть, следующие. В Утверждении I встречается слово "первее" (*prior*), хотя ни его самого, ни родственных ему терминов нет ни среди аксиом-определений, ни в выводе этого утверждения. В выводе Следствия (*corollary*) VI, являющегося леммой Утверждения VII, Спиноза привлекает истину, которой он ни выводит откуда-либо, ни приводит среди аксиом-определений. Эту истину, которую он привлекает, можно выразить так: "Нечто познается через само себя е.т.е. оно является своей собственной причиной". Мы преодолели эту и похожие трудности, добавив пять аксиом, которые назвали постулатами.

Первая встреченная нами трудность второго вида состоит в использовании модальных и модализированных терминов, начиная с самого первого определения. Мы попытались справиться с ней с помощью переформулировки и использования параметров. Вторая трудность второго вида, с которой мы столкнулись, это аксиома 6[4] – спинозовская формулировка референциальной теории истины. Мы преодолели трудность, представленную аксиомой 6, введением оператора истинности "∇" и представлением аксиомы 6 в виде первопорядковой аксиомной схемы[5].

---

[1] Публикация русского перевода осуществлена с любезного разрешения Алекса Блюма. Перевод сделан с издания Blum A., Malinovich S. A Formalization of a Segment of Spinoza's Ethics // Metalogicon. Rivista internazionale di logica pura e applicata, di linguistica e di filosofia. Anno VI. N.1. Gennaio – Giugno 1993. Napoli/Roma, L.E.R. – Т.Ш.

[2] Можно добавить: "с оператором истины". Мы убрали такое добавление, поскольку оно могло бы ввести в заблуждение. Оператор истины не упоминается в наших правилах вывода и появляется только однажды в аксиомной схеме 6. – А.Б., С.М.

[3] Стандартные правила кванторной теории с равенством. – А.Б., С.М.

[4] Здесь в тексте источника явная опечатка: указана цифра 7, хотя речь идет об аксиоме 6. Далее в источнике имеется множество опечаток в формульной части: пропущенные или не той формы скобки, лишние или пропущенные знаки отрицания, не правильные кванторы, не правильные переменные и т.п. Исправление подобных явных опечаток далее мной не оговаривается. – Т.Ш.

[5] Интересную дискуссию на эту тему см. в Sarah Stebbins, *Necessity of Natural Language*, "Philosophical Studies", 37:1 (январь, 1980) с.с. 1-12. – А.Б., С.М.

Джордж Буль думал использовать *Этику*, чтобы проиллюстрировать силу своего нового учения. Но он отчаялся, оставив нас с доказательствами в своем новом формализме только утверждений 6 и 7. Он писал:

> Не часто встречается рассуждение, которое состояло бы в такой степени из игры терминами, определенными как эквивалентные; я посвятил здесь несколько страниц их описанию больше из-за интереса к предмету разговора, чем из-за достоинств демонстрации, как бы высоко некоторые их не оценивали[6].

Список обозначений[7]

Элементарные выражения[8]

Axy	x – атрибут y;
Cxy	x – причина y;
Dxy	x зависит от y;
Ex	x вечен;
Exy	x – сущность y;
Fx	x конечен;
Hx	x абсолютно бесконечен;
Ixy	x содержится в y;
Kx	x конечен в своем роде;
Kxy	x и y имеют одну и ту же природу;
Lxy	x ограничивает y;
Mxy	x – модус y;
Nx	x имеет необходимое существование;
Pxy	x первее y;
Qx	x свободен;
Sx	x – субстанция;
Txy	x – действие y;
Uxy	x знает (познает) y;
Wxyz	z – общее у x и y.

Оператор

$\ulcorner \nabla\Phi \urcorner$	⌜истинно, что Φ⌝

Правила вывода[9]

Использование дедуктивных постулатов

Ai	аксиома №i (A);
Oi	определение №i (D);

[6] *Laws of Thought*, N. Y. Dover Publications, без даты, первая публикация в 1854, с. 216. – А.Б., С.М.

[7] Кроме этих предикатов подразумевается, как было оговорено авторами, наличие в языке равенства и соответствующих дедуктивных постулатов. – Т.Ш.

[8] У авторов этот раздел назван *Термины*. – Т.Ш.

[9] С одной стороны, этот список у авторов содержит не только собственно «правила вывода», но и указания на другие допустимые действия: например, разрешения на вписывание в вывод определений, аксиом и т.п. Одно из указанных авторами правил вывода (коммутативность) так ни разу и не используется в выводе. В конце описаний правил вывода в круглых скобках воспроизводятся их авторские обозначения. С другой стороны, не все использованные авторами и указанные в анализе «правила вывода» были указаны ими в данном списке. Я дополнил список правил вывода ссылками на недостающие правила (их описание заключено в квадратные скобки) и для удобства восприятия разбил список на группы. Более подробное и систематическое описание исчисления Блюма и Малиновича см. в Приложении к данной публикации. – Т.Ш.

Пi постулат №i (P);
Уi [теорема (доказанное выше утверждение) №i];
\+ [посылка].

Пропозициональные правила и законы

В∧	введение конъюнкции;
Симп.	симплификация [различные варианты исключения конъюнкции];
В∨	введение дизъюнкции;
Асс.	ассоциативность ∨;
Эксп.	закон экспортации ⊃;
О⊃	опр. материальной импликации;
О≡	опр. материальной эквивалентности;
ДМ	законы Де Моргана;
КП	контрапозиция;
Абс.	поглощение (абсорбция);
Дист.	дистрибутивность;
Идемп.	идемпотентность;
c.d.	конструктивная дилемма;
h.s.	гипотетический силлогизм (транзитивность ⊃);
m.p.	modus ponens;
m.t.	modus tollens.
В⊃	введение импликации[10];

___ ограничение (запрет) на дальнейшее применение последней посылки и следующих за ней формул вывода вплоть до черты (после применения правила В⊃).

Кванторные правила

В∃	введение квантора существования;
В∀	введение квантора общности;
И∀	удаление квантора общности;
Q¬	пронесение отрицания через кванторы;
QД	дистрибутивность кванторов [пронесение кванторов через связки];

Правила, использованные в выводе

ПИ	[переименование переменных].
Реф=	[рефлексивность =];
Сим=	[симметричность =].

Определения

1. “Под ***причиною самого себя*** я разумею то, сущность чего заключает в себе существование, иными словами, то, чья природа может быть представляема не иначе: как существующею”[11].

$\forall x(Cxx \equiv Nx)$

[10] В результате применения данного правила все формулы, начиная с последней посылки и вплоть до результата его применения, исключаются из дальнейшего вывода, далее к ним не может больше быть применено никаких правил. Этот факт обычно обозначается отчеркиванием исключаемых формул и указанием номеров исключаемых строк. Подробней см. Приложение. – Т.Ш.

[11] Русские цитаты из Спинозы приводятся по Спиноза Б. Избранные произведения. В 2-х томах. М., 1957. СПб., 1999. Т. 1. – Т.Ш.

2. “***Конечною в своем роде*** называется такая вещь, которая может быть ограничена другой вещью той же природы. Так, например, тело называется конечным, потому что мы всегда представляем другое тело, еще большее. Точно так же мысль ограничивается другой мыслью. Но тело не ограничивается мыслью, и мысль не ограничивается телом”.

$\forall x(Kx \equiv \exists y(Kxy \wedge Lyx \wedge x\neq y))$

3. “Под ***субстанцией*** я разумею то, что существует само в себе и представляется само через себя, т.е. то, представление чего не нуждается в представлении другой вещи, из которой оно должно было бы образоваться”.

a. $\forall x(Sx \equiv Ixx)$

b. $\forall x(Sx \equiv Dxx)$

c. $\forall x(Sx \supset \neg\exists y\ (Dxy \wedge y\neq x))$

4. “Под ***атрибутом*** я разумею то, что ум представляет в субстанции как составляющее ее сущность”.

a. $\forall x\forall y(Axy \equiv (Sy \wedge Exy))$

b. $\forall x\exists y(Sx \supset Ayx)$

5. “Под ***модусом*** я разумею состояние субстанции, иными словами, то, что существует в другом и представляется через другое”.

$\forall x\forall y(Mxy \equiv (Sy \wedge Ixy \wedge x\neq y \wedge Dxy))$

6. “Под ***Богом*** я разумею существо абсолютно бесконечное, т.е. субстанцию, состоящую из бесконечно многих атрибутов, из которых каждый выражает вечную и бесконечную сущность”.

$\forall x(Gx \supset (Sx \wedge Hx))$

7. “***Свободной*** называется такая вещь, которая существует по одной только необходимости своей собственной природы и определяется к действию только сама собой. Необходимой же или, лучше сказать, принужденной называется такая, которая чем-либо иным определяется к существованию и действию по известному и определенному образу”.

$\forall x(Qx \equiv (Nx \wedge Cxx))$

8. “Под ***вечностью*** я понимаю самое существование, поскольку оно представляется необходимо вытекающим из простого определения вечной вещи”.

$\forall x(Ex \equiv Nx)$

Аксиомы и аксиомная схема

1. “Все, что существует, существует или само в себе, или в чем-то другом”.

$\forall x(Ixx \vee \exists y(x\neq y \wedge Ixy))$

2. “Что не может быть представляемо через другое, должно быть представляемо само через себя”.

$\forall x\forall y((x\neq y \wedge \neg Dxy) \supset Dxx)$

3. “Из данной определенной причины необходимо вытекает действие, и наоборот, – если нет никакой определенной причины, невозможно, чтобы последовало действие”.

$\forall x(\exists yCxy \supset \exists zTzx) \wedge \forall x(\exists yTxy \supset \exists zCzx)$

4. “Знание действия зависит от знания причины и заключает в себе последнее”.

$\forall x\forall y(Cxy \supset \forall z(Uzy \supset Uzx))$

5. “Вещи, не имеющие между собой ничего общего, не могут быть и познаваемы одна через другую; иными словами – представление одной не заключает в себе представления другой”.

$\forall x\forall y(\neg\exists zWxyz \supset (\exists v(Uvx \wedge \neg Uvy) \wedge \exists v(Uvy \wedge \neg Uvx) \wedge \neg Dxy \wedge \neg Dyx))$

6. “Истинная идея должна быть согласна с своим объектом”.

$\ulcorner \nabla\Phi \equiv \Phi \urcorner$

7. “Сущность всего того, что может быть представляемо не существующим, не заключает в себе существования”.

$\forall x(Nx \supset \forall y(Eyx \supset \forall z(Azy \supset \exists u(z=u))))$

Постулаты

P1. Если x и y различны и x зависит от y, то y первее x.

$\forall x\forall y((x\neq y \wedge Dxy) \supset Pyx)$

P2. x зависит от самого себя е.т.е. x – причина самого себя.

$\forall x(Dxx \equiv Cxx)$

P3. x зависит от y или y зависит от x е.т.е. x и y имеют что-либо общее.

$\forall x\forall y((Dxy \vee Dyx) \equiv \exists wWxyw)$

P4. Если u – сущность x и v – сущность y, то x=y е.т.е. u=v.

$\forall x\forall y\forall u\forall v((Eux \wedge Evy) \supset (x=y \equiv u=v))$

P5. Что-либо является свободным е.т.е. его ничто не ограничивает.

$\forall x(Qx \equiv \neg\exists yLyx)$

Утверждения

Утверждение I. $\forall x\forall y((Sx \wedge Myx) \supset Pxy)$.

“Субстанция по природе первее своих состояний”.

Доказательство (набросок):

1. $\forall x\forall y((x\neq y \wedge Dxy) \supset Pyx)$	П1;
2. $(x\neq y \wedge Dxy) \supset Pyx$	1, И∀ (дважды);
3. $\forall x\forall y(Mxy \equiv (Sy \wedge Ixy \wedge x\neq y \wedge Dxy))$	О1;
4. $Mxy \equiv (Sy \wedge Ixy \wedge x\neq y \wedge Dxy)$	3, И∀ (дважды);
5. $Mxy \supset (Sy \wedge Ixy \wedge x\neq y \wedge Dxy)$	4, О≡, Симп.;
6. $\neg Mxy \vee (Sy \wedge Ixy \wedge x\neq y \wedge Dxy)$	5, О⊃;

7. $\neg Mxy \vee (x \neq y \wedge Dxy)$	6, Дистр., Симп.;
8. $Mxy \supset (x \neq y \wedge Dxy)$	7, О$\supset$;
9. $Mxy \supset Pyx$	8, 2, h.s.;
10. $\neg Sy \vee (Mxy \supset Pyx)$	9, В$\vee$;
11. $(\neg Sy \vee \neg Mxy) \vee Pyx$	10, О$\supset$, Acc. $\vee$;
12. $(Sy \wedge Mxy) \supset Pyx$	11, ДМ, О$\supset$;
13. $\forall x \forall y((Sx \wedge Myx) \supset Pxy)$	12, В$\forall$ (дважды), ПИ.

Утверждение II. $\forall x \forall y((Sx \wedge Sy \wedge \exists z \exists v(Azx \wedge Avy \wedge z \neq v)) \supset \neg \exists w Wxyw)$.
“Две субстанции, имеющие различные атрибуты, не имеют между собой ничего общего”.

Доказательство (набросок)[12]*:*

1. $Sx \wedge Sy$	+;
2. $\exists z \exists v(Azx \wedge Avy \wedge v \neq z)$	+;
3. $Azx \wedge Avy \wedge v \neq z$	+;
4. $\forall x \forall x(Axy \equiv (Sy \wedge Exy))$	О4а;
5. $Azx \equiv (Sx \wedge Ezx)$	4, ПИ, И$\forall$ (дважды);
6. $Azx \supset Ezx$	5, О$\equiv$, Симп., О$\supset$, Дис., Симп., О$\supset$;
7. Azx	3, Симп.;
8. Ezx	6, 7, m.p.;
9. $Avy \equiv (Sy \wedge Evy)$	4, И$\forall$ (дважды);
10. $Avy \supset Evy$	9, О$\equiv$, Симп., О$\supset$, Дис., Симп., О$\supset$;
11. Avy	3, Симп.;
12. Evy	10, 11, m.p.;
13. $\forall x \forall y \forall u \forall v((Eux \wedge Evy) \supset (x=y \equiv u=v))$	П4;
14. $(Ezx \wedge Evy) \supset (x=y \equiv z=v)$	13, И$\forall$ (четырежды);
15. $Ezx \wedge Evy$	8, 12, В$\wedge$;
16. $x=y \equiv z=v$	14, 15, m.p.;
17. $x=y \supset z=v$	16, О$\equiv$;
18. $v \neq z$	3, Симп.;
19. $z \neq v$	18, Сим=;
20. $x \neq y$	17, 19, m.t.;
21. $\forall x(Sx \supset \neg \exists y (Dxy \wedge y \neq x))$	О3с;
22. $\forall x(Sx \supset \forall y(Dxy \supset y=x))$	21, Q$\neg$, ДМ, О$\supset$;
23. $Sx \supset \forall y(Dxy \supset y=x)$	22, И$\forall$;
24. Sx	1, Симп.;
25. $\forall y(Dxy \supset y=x)$	23, 24, m.p.;
26. $Dxy \supset y=x$	25, И$\forall$;
27. $y \neq x$	20, Сим=;
28. $\neg Dxy$	26, 27, m.t.;

[12] В этом доказательстве мной переставлены действия последних двух шагов, что делает рассуждение более последовательным: вначале применяется закон импортации импликации и только следующим шагом – введение кванторов. Соответственно, в приводимом выводе на 46-м шаге стоит формула, отличная от соответствующей формулы источника перевода. Несколько аналогичных небольших изменений внесено и в доказательства утверждений III и VI. Поскольку конкретная форма самих доказательств не имеет значения для рассматриваемой темы формализации, то эти изменения далее мной не оговариваются. – Т.Ш.

29. $Sy \supset \forall x(Dyx \supset x=y)$ 22, ПИ, И$\forall$;
30. Sy 1, Симп.;
31. $\forall x(Dyx \supset x=y)$ 29, 30, m.p.;
32. $Dyx \supset x=y$ 31, И$\forall$;
33. $\neg Dyx$ 32, 20, m.t.;
34. $\neg Dxy \wedge \neg Dyx$ 28, 33, В$\wedge$;
35. $\neg(Dxy \vee Dyx)$ 34, ДМ;
36. $\forall x\forall y((Dxy \vee Dyx) \equiv \exists wWxyw)$ П3;
37. $(Dxy \vee Dyx) \equiv \exists wWxyw$ 36, И$\forall$ (дважды);
38. $\exists wWxyw \supset (Dxy \vee Dyx)$ 37, О$\equiv$;
39. $\neg\exists wWxyw$ 38, 35, m.t.;

——— шаги 3-39 исключены из дальнейшего вывода;

1. $(Azx \wedge Avy \wedge v\neq z) \supset \neg\exists wWxyw$ 39, В$\supset$;
2. $\forall z\forall v((Azx \wedge Avy \wedge v\neq z) \supset \neg\exists wWxyw)$ 40, В$\forall$ (дважды);
3. $\exists z\exists v(Azx \wedge Avy \wedge v\neq z) \supset \neg\exists wWxyw$ 41, Дис$\supset$ (дважды);

——— шаги 2-42 исключены из дальнейшего вывода;

4. $\exists z\exists v(Azx \wedge Avy \wedge v\neq z) \supset (\exists z\exists v(Azx \wedge Avy \wedge v\neq z) \supset \neg\exists wWxyw)$ 42, В$\supset$;
5. $\exists z\exists v(Azx \wedge Avy \wedge v\neq z) \supset \neg\exists wWxyw$ 43, Имп. $\supset$, Идемп $\wedge$;

——— шаги 1-44 исключены из дальнейшего вывода;

6. $(Sx \wedge Sy) \supset (\exists z\exists v(Azx \wedge Avy \wedge v\neq z) \supset \neg\exists wWxyw)$ 44, В$\supset$;
7. $(Sx \wedge Sy \wedge \exists z\exists v(Azx \wedge Avy \wedge v\neq z)) \supset \neg\exists wWxyw$ 45, Имп $\supset$;
8. $\forall x\forall y((Sx \wedge Sy \wedge \exists z\exists v(Azx \wedge Avy \wedge v\neq z)) \supset \neg\exists wWxyw)$ 46, В$\forall$ (дважды).

Утверждение III. $\forall x\forall y(\neg\exists zWxyz \supset (\neg Cxy \wedge \neg Cyx))$.
“Вещи, не имеющие между собой ничего общего, не могут быть причиной одна другой”.

Доказательство (набросок):

1. $\forall x\forall y(Cxy \supset \forall z(Uzy \supset Uzx))$ А4;
2. $Cxy \supset \forall z(Uzy \supset Uzx)$ 1, И$\forall$ (дважды);
3. $\forall x\forall y(\neg\exists zWxyz \supset (\exists v(Uvx \wedge \neg Uvy) \wedge \exists v(Uvy \wedge \neg Uvx) \wedge \neg Dxy \wedge \neg Dyx))$ А5;
4. $\neg\exists zWxyz \supset (\exists v(Uvx \wedge \neg Uvy) \wedge \exists v(Uvy \wedge \neg Uvx) \wedge \neg Dxy \wedge \neg Dyx)$ 3, И$\forall$ (дважды);
5. $\neg\exists zWxyz \supset \exists v(Uvy \wedge \neg Uvx)$ 4, О$\supset$, Дист., Симп., О$\supset$;
6. $\forall v(Uvy \supset Uvx) \supset \exists zWxyz$ 5, КП, Q$\neg$, ДМ, О$\supset$;
7. $Cxy \supset \exists zWxyz$ 2, 6, ПИ, h.s.;
8. $\neg\exists zWxyz \supset \neg Cxy$ 7, КП;
9. $\forall y\forall x(Cyx \supset \forall z(Uzx \supset Uzy))$ 1, ПИ;
10. $Cyx \supset \forall z(Uzx \supset Uzy)$ 9, И$\forall$ (дважды);
11. $\neg\exists zWxyz \supset \exists v(Uvx \wedge \neg Uvy)$ 4, О$\supset$, Дист., Симп., О$\supset$;
12. $\forall v(Uvx \supset Uvy) \supset \exists zWxyz$ 11, КП, Q$\neg$, ДМ, О$\supset$;
13. $Cyx \supset \forall v(Uvx \supset Uvy)$ 10, ПИ;
14. $Cyx \supset \exists zWxyz$ 13, 12, h.s.;
15. $\neg\exists zWxyz \supset \neg Cyx$ 13, КП;
16. $(\neg\exists zWxyz \supset \neg Cxy) \wedge (\neg\exists zWxyz \supset \neg Cyx)$ 8, 15, В$\wedge$;
17. $\neg\exists zWxyz \supset (\neg Cxy \wedge \neg Cyx)$ 16, О$\supset$, Дист., О$\supset$;
18. $\forall x\forall y(\neg\exists zWxyz \supset (\neg Cxy \wedge \neg Cyx))$ 17, В$\forall$ (дважды).

Утверждение IV. $\forall x\forall y((Sx \wedge Sy \wedge x\neq y) \supset (\exists z(Azx \wedge \neg Azy) \vee \exists v(Mvx \wedge \neg Mvy)))$.

“Две или более различные вещи различаются между собой или различием атрибутов субстанций, или различием их модусов (состояний)”.

Доказательство (набросок):

1. $Sx \wedge Sy \wedge \forall z(Azx \supset Azy)$	+;
2. Sx	1, Симп.;
3. Sy	1, Симп.;
4. $\forall z(Azx \supset Azy)$	1, Симп.;
5. $Azx \supset Azy$	4, И$\forall$;
6. $\forall x\forall y(Axy \equiv (Sy \wedge Exy))$	O4a;
7. $Azy \equiv (Sy \wedge Ezy)$	6, ПИ; И$\forall$ (дважды);
8. $Azy \supset (Sy \wedge Ezy)$	7,O$\equiv$, Симп.;
9. $Azx \equiv (Sx \wedge Ezx)$	6, ПИ; И$\forall$ (дважды);
10. $(Sx \wedge Ezx) \supset Azx$	9, O$\equiv$, Симп.;
11. $(Sx \wedge Ezx) \supset Azy$	10, 5, h.s.;
12. $(Sx \wedge Ezx) \supset (Sy \wedge Ezy)$	11, 8, h.s.;
13. $Sx \supset (Ezx \supset (Sy \wedge Ezy))$	12, Эксп. $\supset$;
14. $Ezx \supset (Sy \wedge Ezy)$	13, 2, m.p.;
15. $Ezx \supset Ezy$	14, O$\supset$, Дист., Симп., O$\supset$;
16. $Ezx \supset (Ezx \wedge Ezy)$	15, Абс.;
17.Ezx	+;
18. $Ezx \wedge Ezy$	16, 17, m.p.;
19. $\exists z(Ezx \wedge Ezy)$	18, В$\exists$;
———— шаги 17-19 исключены из дальнейшего вывода;	
20. $Ezx \supset \exists z(Ezx \wedge Ezy)$	19, В$\supset$;
21. $\forall z(Ezx \supset \exists z(Ezx \wedge Ezy))$	20, В$\forall$;
22. $\exists zEzx \supset \exists z(Ezx \wedge Ezy)$	21, QД;
23. $\forall x\exists y(Sx \supset Ayx)$	O4b;
24. $Sx \supset \exists yAyx$	23, И$\forall$, QД;
25. $\exists yAyx$	24, 2, m.p.;
26. $Azx \supset (Sx \wedge Ezx)$	9, O$\equiv$, Симп.;
27. $Azx \supset Ezx$	26, O$\supset$, Дист., Симп.;
28.Azx	+;
29. Ezx	27, 28, m.p.;
30. $\exists zEzx$	29, В$\exists$;
———— шаги 28-30 исключены из дальнейшего вывода;	
31. $Azx \supset \exists zEzx$	30, В$\supset$;
32. $\forall z(Azx \supset \exists zEzx)$	31, В$\forall$;
33. $\exists zAzx \supset \exists zEzx$	32, QД;
34. $\exists zAzx$	25, ПИ;
35. $\exists zEzx$	33, 34, m.p.;
36. $\exists z(Ezx \wedge Ezy)$	22, 35, m.p.;
37. $\forall x\forall y\forall u\forall v((Eux \wedge Evy) \supset (x=y \equiv u=v))$	П4;
38. $(Ezx \wedge Ezy) \supset (x=y \equiv z=z)$	37, И$\forall$ (четырежды);
39.$Ezx \wedge Ezy$	+;

40. x=y ≡ z=z	38, 39, m.p.;	
41. (x=y ⊃ z=z) ∧ (z=z ⊃ x=y)	40, O≡;	
42. z=z	Реф=;	
43. z=z ⊃ x=y	41, Симп.;	
44. x=y	43, 42, m.p.;	
——— шаги 39-44 исключены из дальнейшего вывода;		
45. Ezx ∧ Ezy ⊃ x=y	44, B⊃;	
46. ∀z(Ezx ∧ Ezy ⊃ x=y)	45, B∀;	
47. ∃z(Ezx ∧ Ezy) ⊃ x=y	46, QД;	
48. x=y	47, 36, m.p.;	
———— шаги 1-48 исключены из дальнейшего вывода;		
49. Sx ∧ Sy ∧ ∀z(Azx ⊃ Azy) ⊃ x=y	48, B⊃;	
50. ¬(Sx ∧ Sy ∧ ∀z(Azx ⊃ Azy)) ∨ x=y ∨ ∃v(Mvx ∧ ¬Mvy)		49, B∨;
51. ¬(Sx ∧ Sy) ∨ x=y ∨ ¬∀z(Azx ⊃ Azy) ∨ ∃v(Mvx ∧ ¬Mvy)		50, ДМ, Ком;
52. (Sx ∧ Sy ∧ x≠y) ⊃ (∃z(Azx ∧ ¬Azy) ∨ ∃v(Mvx ∧ ¬Mvy)		51, ДМ, O≡, QД;
53. ∀x∀y((Sx ∧ Sy ∧ x≠y) ⊃ (∃z(Azx ∧ ¬Azy) ∨ ∃v(Mvx ∧ ¬Mvy))		52, B∀ (дважды).

Утверждение V. ∀x∀y((Sx ∧ Sy ∧ x≠y) ⊃ ¬∃zWxyz).
“В природе вещей не может быть двух или более субстанций одной и той же природы, иными словами, с одним и тем же атрибутом”.

Доказательство (набросок):

1. Sx ∧ Sy ∧ ∃zWxyz	+;
2. Sx	Симп.;
3. Sy	Симп.;
4. ∃zWxyz	Симп.;
5. ∀x∀y((Dxy ∨ Dyx) ≡ ∃wWxyw)	П5;
6. (Dxy ∨ Dyx) ≡ ∃wWxyw	5, И∀ (дважды);
7. ∃wWxyw ⊃ (Dxy ∨ Dyx)	6, O≡, Симп.;
8. ∃wWxyw	4, ПИ;
9. (Dxy ∨ Dyx)	7, 8, m.p.;
10. ∀x(Sx ⊃ ¬∃y (Dxy ∧ y≠x))	O3c;
11. Sx ⊃ ¬∃y (Dxy ∧ y≠x)	10, И∀;
12. ¬∃y (Dxy ∧ y≠x)	11, 2, m.p.;
13. ∀y(Dxy ⊃ y=x)	12, Q¬, ДМ, O⊃;
14. Dxy ⊃ y=x	13, И∀;
15. Sy ⊃ ¬∃x (Dyx ∧ x≠y)	10, ПИ, И∀;
16. ¬∃x (Dyx ∧ x≠y)	15, 3, m.p.;
17. ∀x(Dyx ⊃ x=y)	16, Q¬, ДМ, O⊃;
18. Dyx ⊃ x=y	17, И∀;
19. (Dxy ⊃ y=x) ∧ (Dyx ⊃ x=y)	14, 18, B∧;
20. y=x ∨ x=y	19, 9, c.d.;
21. x=y ∨ x=y	20, Сим=;
22. x=y	21, Идемп.;
——— шаги 1-22 исключены из дальнейшего вывода;	
23. (Sx ∧ Sy ∧ ∃zWxyz) ⊃ x=y	22, B⊃;
24. (Sx ∧ Sy) ⊃ (∃zWxyz ⊃ x=y)	23, Эксп. ⊃;
25. (Sx ∧ Sy) ⊃ (x≠y ⊃ ¬∃zWxyz)	24, КП;

26. $(Sx \wedge Sy \wedge x \neq y) \supset \neg\exists zWxyz$	25, Эксп. $\supset$;
27. $\forall x\forall y((Sx \wedge Sy \wedge x \neq y) \supset \neg\exists zWxyz)$	26, В$\forall$ (дважды);

Утверждение VI. $\forall x\forall y\ ((Sx \wedge Sy \wedge x \neq y) \supset \neg Cxy)$.
“Одна субстанция не может производиться другой субстанцией”.
Доказательство (набросок):

1. $\forall x\forall y((Sx \wedge Sy \wedge x \neq y) \supset \neg\exists zWxyz)$	У5;
2. $(Sx \wedge Sy \wedge x \neq y) \supset \neg\exists zWxyz$	1, И$\forall$ (дважды);
3. $\forall x\forall y(\neg\exists zWxyz \supset (\neg Cxy \wedge \neg Cyx))$	У3;
4. $\neg\exists zWxyz \supset (\neg Cxy \wedge \neg Cyx)$	3, И$\forall$ (дважды);
5. $\neg\exists zWxyz \supset \neg Cxy$	4, Дист., Симп.;
6. $(Sx \wedge Sy \wedge x \neq y) \supset \neg Cxy$	2, 5, h.s.;
7. $\forall x\forall y((Sx \wedge Sy \wedge x \neq y) \supset \neg Cxy)$	6, В$\forall$ (дважды);

Утверждение VII. $\forall x(Sx \supset Nx)$.
“Природе субстанции присуще существование”.
Доказательство (набросок):

1. $\forall x(Sx \equiv Dxx)$	О3b;
2. $Sx \supset Dxx$	1, И$\forall$, О$\equiv$, Симп.;
3. $\forall x(Dxx \equiv Cxx)$	П2;
4. $Dxx \equiv Cxx$	3, И$\forall$;
5. $(Dxx \supset Cxx) \wedge (Cxx \supset Dxx)$	4, О$\equiv$;
6. $Dxx \supset Cxx$	5, Симп.;
7. $Sx \supset Cxx$	2, 6, h.s.;
8. $\forall x(Cxx \equiv Nx)$	О1;
9. $Cxx \supset Nx$	8, И$\forall$, О$\equiv$, Симп.;
10. $Sx \supset Nx$	7, 9, h.s.;
11. $\forall x(Sx \supset Nx)$	10, В$\forall$.

Утверждение VIII. $\forall x(Sx \supset (\neg Kx \wedge \neg\exists yLyx))$.
“Всякая субстанция необходимо бесконечна”.
Доказательство (набросок):

1. Sx	+;
2. $\forall x(Sx \equiv Dxx)$	О3b;
3. $Sx \equiv Dxx$	2, И$\forall$;
4. $Sx \supset Dxx$	3, О$\equiv$, Симп.;
5. Dxx	4, 1, m.p.;
6. $\forall x(Dxx \equiv Cxx)$	П2;
7. $Dxx \equiv Cxx$	6, И$\forall$;
8. $Dxx \supset Cxx$	7, О$\equiv$, Симп.;
9. Cxx	8, 5, m.p.;
10. $\forall x(Cxx \equiv Nx)$	О1;
11. $Cxx \equiv Nx$	10, И$\forall$;
12. $Cxx \supset Nx$	11, О$\equiv$, Симп.;
13. Nx	12, 9, m.p.;
14. $\forall x(Qx \equiv (Nx \wedge Cxx))$	О7;

15. $Qx \equiv (Nx \wedge Cxx)$	14, И$\forall$;
16. $(Nx \wedge Cxx) \supset Qx$	15, О$\equiv$, Симп.;
17. $Nx \wedge Cxx$	13, 9, В$\wedge$;
18. Qx	16, 17, m.p.;
19. $\forall x(Qx \equiv \neg\exists yLyx)$	П5;
20. $Qx \equiv \neg\exists yLyx$	19, И$\forall$;
21. $Qx \supset \neg\exists yLyx$	20, О$\equiv$, Симп.;
22. $\neg\exists yLyx$	21, 18, m.p.;
23. $\forall y\neg Lyx$	22, Q$\neg$;
24. $\neg Lyx$	23, И$\forall$;
25. $\neg Lyx \vee \neg Kxy \vee x=y$	24, В$\vee$;
26. $\neg(Lyx \wedge Kxy \wedge x\neq y)$	25, ДМ;
27. $\forall y\neg(Lyx \wedge Kxy \wedge x\neq y)$	26, В$\forall$;
28. $\neg\exists y(Lyx \wedge Kxy \wedge x\neq y)$	27, Q$\neg$;
29. $\forall x(Kx \equiv \exists y(Kxy \wedge Lyx \wedge x\neq y))$	О2;
30. $Kx \equiv \exists y(Kxy \wedge Lyx \wedge x\neq y)$	29, И$\forall$;
31. $Kx \supset \exists y(Kxy \wedge Lyx \wedge x\neq y)$	30, О$\equiv$, Симп.;
32. $\neg Kx$	31, 28, m.t.;
33. $\neg Kx \wedge \neg\exists yLyx$	32, 22, В$\wedge$;

———— шаги 1-33 исключены из дальнейшего вывода;

34.$Sx \supset (\neg Kx \wedge \neg\exists yLyx)$	33, В$\supset$;
35.$\forall x(Sx \supset (\neg Kx \wedge \neg\exists yLyx))$	34, В$\forall$.

Утверждение XI. $\forall x(Gx \supset Nx)$.
“Бог, или субстанция, состоящая из бесконечно многих атрибутов, из которых каждый выражает вечную и бесконечную сущность, необходимо существует”.

Доказательство (набросок):

1. $\forall x(Gx \supset (Sx \wedge Hx))$	О6;
2. $Gx \supset (Sx \wedge Hx)$	1, И$\forall$;
3. $Gx \supset Sx$	2, О$\supset$, Дист., Симп., О$\supset$;
4. $\forall x(Sx \supset Nx)$	У7;
5. $Sx \supset Nx$	4, И$\forall$;
6. $Gx \supset Nx$	3, 5, h.s.;
7. $\forall x(Gx \supset Nx)$	6, В$\forall$.